Einführung in die Logik - 09

Logikkalküle für die automatische (Sprach-)Verarbeitung:

(1) Aussagenlogische Widerlegungsverfahren

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Logik in der automatischen (Sprach-)Verarbeitung

- Ziel: automatische Deduktionssysteme (Inferenzsysteme) und Theorembeweiser
- Problem: eine Prozedur zu finden, die rein mechanisch, d.h. ohne Intuition bzgl. erfolgversprechender Ableitungsstrategien, in endlichen Schritten zu entscheiden erlaubt, ob eine Aussage aus einer Menge von Aussagen ableitbar ist (d.h. logisch folgt) oder nicht.
- Lösung: Verfahren, die Aussagen systematisch syntaktisch so umformen, dass für beliebige Aussagen in endlichen Schritten sämtliche möglichen Ersetzungen bestimmt werden.
  - Für die **Aussagenlogik** (AL) kommen vorzugsweise sog. **Widerlegungsverfahren** zum Einsatz
  - Für die **Prädikatenlogik 1. Stufe** (PL-1), die im Gegensatz zur AL nicht vollständig entscheidbar, sondern nur semi-entscheidbar ist[(*)], wird ein anderer Weg gegangen: die Einschränkung der Ausdrucksmächtigkeit von PL-1 auf entscheidbare prädikatenlogische Fragmente
    - [(*)] nur der positive, aber nicht der negative Fall einer Folgerung/eines Theorems kann prinzipiell, d.h. insofern keine Beschränkungen bzgl. Zeit und Speicher existieren, entschieden werden
    - mehr dazu in Teil 11 zu Beschreibungslogiken

Eine kleine Widerlegungs-Etüde zum Aufwärmen: Bestimmung von Tautologien mittels Quick Falsification

Reductio ad absurdum:

- Ein wfA A ist tautologisch, wenn sich unter der Annahme, der Wahrheitswert von A sei 0, ein Widerspruch ableiten lässt.

	p	$\rightarrow$	(q	$\rightarrow$	p)
Annahme:		0			
Konsequenz:	1			0	
Konsequenz:			1		0
Widerspruch:			$\perp$		

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Widerlegungs-Etüde Nr. 2: Bestimmung von Tautologien mittels Quick Falsification

Reductio ad absurdum:

- Ein wfA A ist tautologisch, wenn sich unter der Annahme, der Wahrheitswert von A sei 0, ein Widerspruch ableiten lässt.

	(p	$\rightarrow$	q)	$\rightarrow$	p
Annahme:				0	
Konsequenz:		1			0
Konsequenz:	0				
Option 1:			0		
Option 2:			1		

also: kein Widerspruch, keine Tautologie

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Bestimmung von Tautologien

Übungen zur Quick Falsification

- $\neg p \rightarrow \neg (p \wedge q)$
- $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

Widerlegungsverfahren

- Tableaux-Verfahren
- Resolution über Normalformen
  - DNF - Disjunktive Normalform
  - KNF - Konjunktive Normalform

die folgenden Ausführungen orientieren sich an der Darstellung in
M. Spies, Einführung in die Logik, Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag 2004

nach Spies 2004

Widerlegungsverfahren - 2: Tableaux

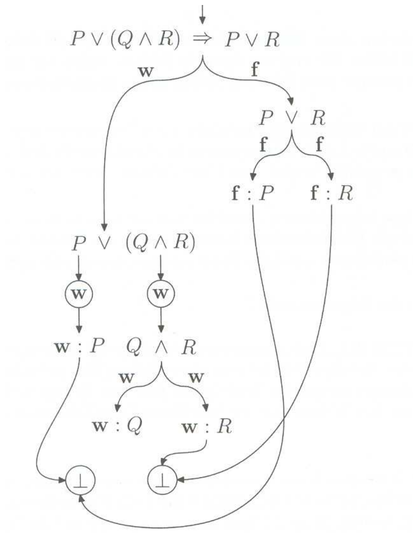
- Prüfung auf logische Äquivalenz und Folgerung mittels Wahrheitswerttafeln wird mit zunehmender Zahl atomarer Aussagen umständlich und unübersichtlich.
- Das Tableau-Verfahren orientiert sich an der Struktur der Formel.
- Da gilt: *A* |= *B gdw. A* $\rightarrow$ *B eine Tautologie ist*, wird beim Test auf logische Folgerung eine Interpretation gesucht, in der *A* $\rightarrow$ *B* falsch ist [analog für *A* $\leftrightarrow$ *B* beim Test auf logische Äquivalenz].
- Die Abarbeitung von komplexen Aussagen hinunter zu ihren atomaren Bestandteilen erfolgt durch die **Propagation von Bewertungen (Interpretationen) V**.

  - diese Methode geht zurück auf Arbeiten des ndl. Logikers Evert Willem Beth um 1955 und wird daher auch *Beth Tableaux* genannt
    - einige Logikeinführungen sprechen auch von *Baumkalkülen*

nach Spies 2004

Exposition: Tautologieprüfung mit 2 Unter-Tableaux

[Quelle: M. Spies, Einführung in die Logik, Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag 2004, S. 30]



nach Spies 2004

Durchführung: Widerlegungsverfahren - 2: Tableaux

Propagation von Bewertungen (Beispiele)

- eindeutige Propagationen: Fortführung im selben Tableau
  - $V(A \rightarrow B) = 0$ zu $V(A) = 1$ und $V(B) = 0$
  - $V(A \vee B) = 0$ zu $V(A) = 0$ und $V(B) = 0$
  - $V(A \wedge B) = 1$ zu $V(A) = 1$ und $V(B) = 1$
  - $V(\neg A) = 1$ zu $V(A) = 0$
  - $V(\neg A) = 0$ zu $V(A) = 1$
- alternative Propagationen: Fortführung in Unter-Tableaux
  - $V(A \rightarrow B) = 1$ zu $V(A) = 0$ oder $V(B) = 1$
  - $V(A \vee B) = 1$ zu $V(A) = 1$ oder $V(B) = 1$
  - $V(A \wedge B) = 0$ zu $V(A) = 0$ oder $V(B) = 0$
  - $V(A \leftrightarrow B) = 0$ zu $V(A \wedge \neg B) = 1$ oder $V(\neg A \wedge B) = 1$
  - ...

nach Spies 2004

Durchführung: Widerlegungsverfahren - 2: Tableaux

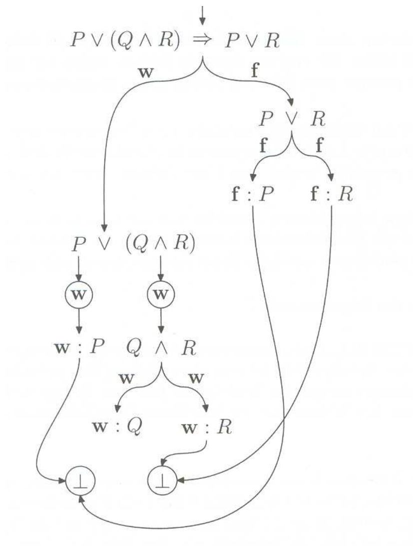
Tautologieprüfung für logische Folgerung *A* |= *B*
mit der Testvoraussetzung *A* und der Testfolgerung *B*:

- Ein Tableau wird eröffnet, indem das Konditional $A \rightarrow B$ (die Testformel) falsch gesetzt wird: $V(A) = 1$ und $V(B) = 0$.
- Die Ausgangsbewertung $V(A) = 1$ und $V(B) = 0$ wird propagiert.
- Wird durch die Propagation eine widersprüchliche Bewertung von atomaren Aussagen erreicht, ist das Tableau **geschlossen** und die logische Folgerung bewiesen. Ein Tableau mit Unter-Tableaux ist dann geschlossen, wenn alle Unter-Tableaux geschlossen sind.
- Wird durch die Propagation keine widersprüchliche Bewertung von atomaren Aussagen erreicht (d.h. alle atomaren Aussagen haben einen eindeutig bestimmten Wahrheitswert), ist das Tableau **offen** und und es liegt keine logische Folgerung vor.

nach Spies 2004

Reprise: Tautologieprüfung mit 2 Unter-Tableaux

[Quelle: M. Spies, Einführung in die Logik, Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag 2004, S. 30]



nach Partee et al. (1990)

Variationen über ein Thema von Beth: Tableaux-Darstellung nach Partee et al. (1990), ch 6.6

- Das Tableaux-Verfahren arbeitet mit der Annahme, dass es eine Zuweisung von Wahrheitswerten gibt, die die Prämissen verifiziert und die Konklusion falsifiziert.
- Deshalb werden die Prämissen in einer Tabelle in die Spalte TRUE geschrieben und die Konklusion in die Spalte FALSE.
- Die Tableaux-Konstruktionsregeln legen für jedes Konnektiv unter TRUE und FALSE fest, welche weiteren Aussagen in welche Spalte geschrieben werden müssen (vgl. die Propagationsregeln vom vorhergehenden Abschnitt).
- Ein (Unter-)Tableau ist abgeschlossen gdw. eine Aussage sowohl unter TRUE als auch unter FALSE steht.
- Ein komplexes Tableau ist abgeschlossen gdw. alle seine Unter-Tableaux abgeschlossen sind.
- Beispiele: Prüfe, ob
  - $p \wedge q \models \neg\neg p$
  - $\neg(p \rightarrow q) \models \neg p \vee q$
  - $\neg p \vee q \models p \rightarrow q$

Die Tabellennotation von Partee et al. ist etwas komfortabler, wenn Folgerung aus einer größeren Prämissenmenge ($A_1, \ldots, A_n \models B$) geprüft werden soll

==

Lit.: Partee, Barbara H.; ter Meulen, Alice; Wall, Robert E. (1990): *Mathematical Methods in Linguistics.* Dordrecht: Kluwer.

nach Partee et al. (1990)

$p \wedge q \models \neg\neg p$?

	TRUE	FALSE	
(1)	$p \wedge q$	$\neg\neg p$	
(2)	p		aus (1)T
(3)	q		aus (1)T
(4)	$\neg p$		aus (1)F
(5)		p	aus (4)T
	=======	======	closure (2)T vs. (5)F

nach Partee et al. (1990)

$\neg(p \rightarrow q) \models \neg p \vee q$?

	TRUE	FALSE	
(1)	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p \vee q$	
(2)		$\neg p$	aus (1)F
(3)		q	aus (1)F
(4)	p		aus (2)F
(5)		$p \rightarrow q$	aus (1)T
(6)	p		aus (5)F
(7)		q	aus (5)F
			no closure

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

nach Partee et al. (1990)

$\neg p \vee q \models p \rightarrow q$?

	TRUE		FALSE		
(1)	$\neg p \vee q$		$p \rightarrow q$		
(2)	p				aus (1)F
(3)			q		aus (1)F
(4)	(4.1) $\neg$p	(4.2) q	(4.1)	(4.2)	aus (1)T
(5)		=====		=====	sub-closure (3)F vs. (4.2)T
(6)			(6.1) p		aus (4.1)T
(7)	=====		=====		sub-closure (2)T vs. (6.1)F
(8)	=====	=====	=====	=====	closure (all sub-tableaux closed)

nach Partee et al. (1990)

Konstruktionsregeln für Tableaux nach Partee et al. (1990), ch. 6.6

Construction Rules for Beth Tableaux

		If statement occurs under TRUE	If statement occurs under FALSE
negation	$\sim p$	put p under FALSE	put p under TRUE
conditional	$p \rightarrow q$	SPLIT! put q under TRUE, and p under FALSE	put p under TRUE and q under FALSE
conjunction	$p \& q$	put p and q under TRUE	SPLIT! put p under FALSE and q under FALSE
disjunction	$p \vee q$	SPLIT! put p under TRUE and q under TRUE	put p and q under FALSE

nach Partee et al. (1990)

Fazit: semantische Tableaux als Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik

- Die Methode der semantischen Tableaux (Beth-Tableaux, Baumkalkül) liefert eine Entscheidungsprozedur für Folgerung und Gültigkeit in der Aussagenlogik.
  - Jede Aussage besteht aus einer endlichen Menge von Konnektiven und atomaren Aussagen.
  - Die Konstruktionsregeln für Tableaux garantieren, dass jede Tableau-Konstruktion in endlichen Schritten terminiert, da das Tableau entweder geschlossen ist oder ein Gegenbeispiel in Form einer konsistenten Zuweisung von Wahrheitswerten zu Prämissen und Konklusion liefert.
  - Jedes Tableau besteht daher aus einer endlichen Menge von Schritten entsprechend der Anzahl der Konnektive in der getesteten Aussage. Zirkuläre (nicht-terminierende) Tableaux sind ausgeschlossen.
  - Nicht voll-automatisiert ist lediglich die Reihenfolge der Anwendung der Regeln

Exkurs: Darstellung komplexer Zustandsbeschreibungen durch Normalformen

nach Spies 2004

- Jede Wahrheitsfunktion kann durch Kombinationen der Konnektoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$ dargestellt werden [s.o., AL-Theoreme]. Beispiele:
  - $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$
  - $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
- Normalformen dienen der übersichtlichen und (maschinell) leicht verarbeitbaren Darstellung von möglicherweise hochkomplexen aussagenlogischen Zustandsbeschreibungen.
  - KNF - Konjunktive Normalform:
    Konjunktion von Disjunktionen über Literalen*
  - DNF - Disjunktive Normalform:
    Disjunktion von Konjunktionen über Literalen*

    (*) Ein Literal ist eine atomare Aussage oder deren Negation in einer Konjunktion oder Disjunktion.
    - Logik-Programmierung:
      - Klauseln: Disjunkte (d.h. Konjunktionsglieder) einer KNF
      - Horn-Klauseln: Klauseln mit nur einem positiven Literal

nach Spies 2004

Bildung von KNF und DNF
(am Beispiel der empirischen gewonnenen Wahrheitswerttafel für "Wenn es regnet und kalt ist, wird die Straße glatt")

p	q	r	Ziel
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

nach Spies 2004

Bildung von KNF und DNF
(am Beispiel der empirischen gewonnenen Wahrheitswerttafel für "Wenn es regnet und kalt ist, wird die Straße glatt")

p	q	r	Ziel
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Bildung der DNF:
- Für jede Zeile mit Resultat 1 wird eine Konjunktion gebildet mit nicht-negiertem Literal für Aussagen mit Wert 1 und negiertem Literal für Aussagen mit Wert 0.
- Diese Konjunktionen werden durch Disjunktion verbunden.

DNF:
$(p \wedge q \wedge r) \vee$
$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$
$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee$
$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

nach Spies 2004

Bildung von KNF und DNF

(am Beispiel der empirischen gewonnenen Wahrheitswerttafel für "Wenn es regnet und kalt ist, wird die Straße glatt")

p	q	r	Ziel
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Bildung der KNF:
- Für jede Zeile mit Resultat 0 wird eine Disjunktion gebildet mit umgekehrtem Wahrheitswert für Literale (Aussagen mit Wert 1 als negierte Literale, Aussagen mit Wert 0 als positive Literale).
- Diese Disjunktionen werden durch Konjunktion verbunden.

KNF:

$(\neg p \vee \neg q \vee r) \quad \wedge$
$(\neg p \vee q \vee \neg r) \quad \wedge$
$(p \vee \neg q \vee \neg r) \quad \wedge$
$(p \vee q \vee \neg r)$

nach Brewka 2003

verallgemeinerte Umformungsregeln für KNF und DNF

- Ersetze in dem wfA jedes Vorkommen des Teil-wfA

$A \rightarrow B$	durch	$\neg A \vee B$
$\neg\neg A$	durch	A
$\neg(A \vee B)$	durch	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg(A \wedge B)$	durch	$\neg A \vee \neg B$,

bis kein solcher Teil-wfA mehr vorkommt

nach Brewka 2003

verallgemeinerte Umformungsregeln für KNF und DNF

- Ersetze in dem wfA jedes Vorkommen des Teil-wfA

$A \rightarrow B$	durch	$\neg A \vee B$
$\neg\neg A$	durch	A
$\neg(A \vee B)$	durch	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg(A \wedge B)$	durch	$\neg A \vee \neg B$,

De Morgan - Gesetze

bis kein solcher Teil-wfA mehr vorkommt

nach Brewka 2003

verallgemeinerte Umformungsregeln für KNF und DNF

- Ersetze in dem wfA jedes Vorkommen des Teil-wfA

$A \rightarrow B$	durch	$\neg A \vee B$
$\neg\neg A$	durch	A
$\neg(A \vee B)$	durch	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg(A \wedge B)$	durch	$\neg A \vee \neg B$,

De Morgan - Gesetze

bis kein solcher Teil-wfA mehr vorkommt

- KNF:
  - Ersetze in dem wfA jedes Vorkommen des Teil-wfA

$A \vee (B \wedge C)$	durch	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$(A \wedge B) \vee C$	durch	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$

    bis kein solcher Teil-wFA mehr vorkommt.

Distributiv-gesetze

- DNF:
  - Ersetze in dem wfA jedes Vorkommen des Teil-wfA

$A \wedge (B \vee C)$	durch	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$(A \vee B) \wedge C$	durch	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

    bis kein solcher Teil-wFA mehr vorkommt.

nach Brewka 2003 und Habel et al. 2001

verallgemeinerte Umformungsregeln für KNF und DNF

Ersetze in dem wfA jedes Vorkommen des Teil-wfA

$A \rightarrow B$	durch	$\neg A \vee B$
$\neg\neg A$	durch	A
$\neg(A \vee B)$	durch	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg(A \wedge B)$	durch	$\neg A \vee \neg B$,

bis kein solcher Teil-wfA mehr vorkommt

treibe Negationen nach innen zu den atomaren Formeln

- KNF:
  - Ersetze in dem wfA jedes Vorkommen des Teil-wfA

$A \vee (B \wedge C)$	durch	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$(A \wedge B) \vee C$	durch	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$

    bis kein solcher Teil-wFA mehr vorkommt.

    treibe Disjunktionen nach innen und Konjunktionen nach außen
- DNF:
  - Ersetze in dem wfA jedes Vorkommen des Teil-wfA

$A \wedge (B \vee C)$	durch	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$(A \vee B) \wedge C$	durch	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

    bis kein solcher Teil-wFA mehr vorkommt.

    treibe Konjunktionen nach innen und Disjunktionen nach außen

nach Schöning 1987

Darstellung komplexer Zustandsbeschreibungen durch Normalformen

- Normalform-Theorem

  Für jeden wfA A gibt es *mindestens einen* äquivalenten wfA in konjunktiver Normalform und *mindestens einen* äquivalenten wfA in disjunktiver Normalform.

  - Die beiden Methoden zur Erzeugung von Ausdrücken in DNF bzw. KNF - Ableitung aus Wahrheitswerttabellen oder Erzeugung mittels Umformungsregeln auf Basis der AL-Theoreme - können für einen gegebenen wfA. zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.
  - Die Ausdrücke in DNF oder KNF, die durch die genannten Methoden erzeugt werden, sind nicht notwendigerweise die kürzestmöglichen.

nach Spies 2004

Darstellung komplexer Zustandsbeschreibungen durch Normalformen

- DNF - fallbasierte Zustandsbeschreibungen
  - denn jede Konjunktion ist eine Zustandsbeschreibung, die genau eine denkbare Situation (mögliche Welt) als wahr setzt.
- KNF - regelbasierte Zustandsbeschreibung
  - denn jede Disjunktion kann als Konditional aufgefasst werden, d.h. als eine Regelaussage.
- DNF vs. KNF in der Praxis
  - DNF sind für kleine Mengen atomarer Aussagen einfach zu handhaben, weil sie Listen von zulässigen Situationen beschreiben.
  - DNF werden umständlich bei größeren Mengen atomarer Aussagen (werden bei neu hinzukommenden Aussagen jeweils um Faktor 2 länger)
  - Deshalb Kodierung von komplexen Situationen oft durch Regelmengen (KNF); zusätzliche Fakten dann oft als Klauseln mit nur einem Literal
    - realistische Anwendungen wie z.B. Fehlerdiagnose bei technischen Anlagen:
      - 5.000 bis 20.000 atomare Aussagen
      - 1.000 bis 5.000 Regeln

Widerlegungsverfahren-3: Resolution

- Die Resolution ist ein Umformungsverfahren, das aus 2 wfAs in **KNF** einen neuen wfA in KNF, die ***Resolvente***, erzeugt.
- Die Resolvente ist eine logische Folgerung aus den Ausgangs-wfAs.
- Gelingt es, aus einer Menge von wfAs die **leere Resolvente** abzuleiten, so ist die Ausgangsmenge widersprüchlich bzw. ***unerfüllbar***.
- Damit kann die Resolution als Widerlegungsverfahren für den Nachweis von Tautologien (und damit logischen Folgerungen und Äquivalenzen) verwendet werden, indem aus den jeweiligen Negationen ein Widerspruch abzuleiten versucht wird.

die Ausführungen zur Resolution orientieren sich an den Darstellungen in
• U. Schöning, Logik für Informatiker, Mannheim/Wien/Zürich, BI Wissenschaftsverlag 1987
• G. Brewka, http://www.informatik.uni-leipzig.de/~brewka/papers/Aussagenlogik.pdf
• C. Habel & C. Eschenbach, http://www.informatik.uni-hamburg.de/WSV/f1/2001/VL-PDF/F1-08AL-Resolution.pdf
• M. Spies, Einführung in die Logik, Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag 2004

Widerlegungsverfahren - 3: Resolution

Def.: Resolutionsverfahren

- Überführe einen wfA in die KNF.
- Ein Resolutionsschritt bzgl. des Literals A besteht darin, aus zwei Klauseln der Form $A \vee B$ und $\neg A \vee D$ die Klausel $B \vee D$ als Resolvente abzuleiten.
  - Beispiel: $p \vee \neg r$ ist die Resolvente aus $p \vee q$ und $\neg q \vee \neg r$
- Spezialfall: aus $A \vee B$ und $\neg A$ ergibt sich die Resolvente B
- 2 identische Klauseln A und A werden zu A gekürzt.
- Aus 2 Klauseln der Form A und $\neg A$ wird die Resolvente $\perp$ (die leere oder widersprüchliche Klausel) abgeleitet.
- Wenn aus einer Klauselmenge M die Resolvente $\perp$ abgeleitet werden kann, ist der Widerspruchsbeweis für die Negation von M erbracht.

Widerlegungsverfahren - 3: Resolution

Beispiel: Resolutionsverfahren

Zeige, dass $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ eine Tautologie ist.

- Leite für $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ einen Widerspruch (d.h. die leere Klausel $\perp$) ab.
- Überführe $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ in die KNF (z.B. anhand der Wahrheitswerttafel):
  - $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
- Resolviere:
  - $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \quad \wedge \quad (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
  - $\neg p \vee \neg p \quad \wedge \quad p \vee p$
  - $\neg p \quad \wedge \quad p$
  - $\perp$
- Also: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ ist eine Tautologie.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg